Name: **2. MATHEMATIKKLAUSUR** 16.01.2004

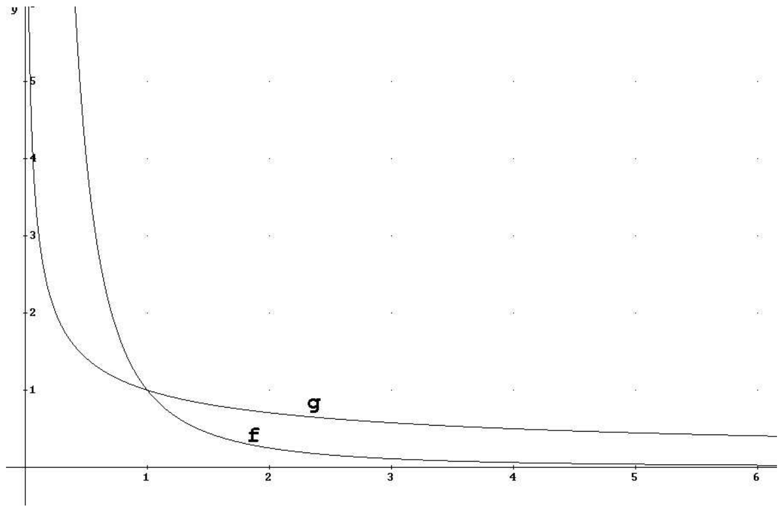
M3 – Mathe 13 GK (GA) Bearbeitungszeit: 135 min

Aufgabe1

Gegeben sind die Funktionen $f(x)=\frac{1}{x^2}$ *und* $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Bearbeiten Sie für beide Funktionen die folgenden Teilaufgaben:

a) Berechne jeweils den Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse auf [1;4] begrenzt.
b) Berechne jeweils den Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse auf [1;a] begrenzt. (a>1)
c) Berechne jeweils den Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse auf $\left[1;\infty\right[$ begrenzt



Aufgabe 2

Zeichnen Sie die Graphen von $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ für $0\le x\le 1$ und $g(x)=3-x$ für $0\le x\le 2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Die beiden Graphen und die x-Achse begrenzen auf [0;2] eine Fläche, die um die x-Achse rotieren soll.

a) Beschreiben Sie den entstehenden Körper.
b) Bestimmen Sie das Rotationsvolumen mit Hilfe der Integralrechnung.
c) Bestätigen Sie die Ergebnisse mit Hilfe der Volumenformeln aus der Formelsammlung.

Aufgabe 3

Die Fläche, die von den Graphen von $f(x) = -x^2+4$ und der Geraden $g(x)= -x$ eingeschlossen wird, rotiere um die x-Achse. Bestimmen Sie das Rotationsvolumen.

Aufgabe4

a) Berechne Sie die 1.Ableitungsfunktion: $f(x)=e^{2x}$ $g(x) = xe^{-x+2}$ $h(x)=e^{x^2}$

b) Berechne Sie eine Stammfunktion: $f(x)=e^{4x}$; $g(x) = e^{1-x}$; $h(x)=4x^3e^{x^4}$; $j(x)=4xe^{-x^2}$

Aufgabe 5

Die Funktion $f(x)=1-e^{-x+2}$ schließt mit der negativen y-Achse und der positiven x-Achse eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen $f(x)=(x-3)e^{x-1}$ *und* $g(x)=3-x$

a) Bestimmen Sie die ersten 3 Ableitungen von f. Welche Gesetzmäßigkeit kann man erkennen? Leiten Sie hieraus auch die Gleichung einer Stammfunktion F von f her.
b) Untersuchen Sie den Graph von f auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.
c) Erstellen Sie eine gemeinsame Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen von f und g.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	3,5
f(x)								
g(x)								

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g für $0\le x\le 3{,}5$ begrenzt wird.

Viel Erfolg!

GK M1/M2/M3 13.1 2.Klausur Name: ____________________

CUE/GA 16.01.04

Lösungen

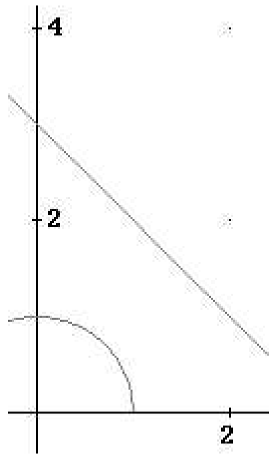
Aufgabe 1:

a) $\int_1^4 f(x)dx = [-\frac{1}{x}]_1^4 = -\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$; $\int_1^4 g(x)dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 4-2 = 2$

b) $\int_1^a f(x)dx = [-\frac{1}{x}]_1^a = -\frac{1}{a}+1 = 1-\frac{1}{a}$ $\int_1^a g(x)dx = [2\sqrt{x}]_1^a = 2\sqrt{a}-2 = 2(\sqrt{a}-1)$

c) $\lim\limits_{a\to\infty} 1-\frac{1}{a} = 1-0 = 1$ $\lim\limits_{a\to\infty} 2(\sqrt{a}-1) = 2\cdot\lim\limits_{a\to\infty}\sqrt{a}-1 = 2\cdot\infty = \infty$

Aufgabe 2:



a) Der entstehende Körper hat die Form eines Kegelstumpfes, aus dem eine Halbkugel herausgeschnitten wurde.

b) Über die Integralrechnung ergibt sich:

$$V = \pi\cdot\int_0^2 g^2(x)dx - \pi\cdot\int_0^1 f^2(x)dx$$

$$= \pi\cdot\int_0^2 x^2-6x+9dx - \pi\cdot\int_0^1 1-x^2dx$$

$$= \pi\cdot[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x]_0^2 - \pi\cdot[x-\frac{1}{3}x^3]_0^1$$

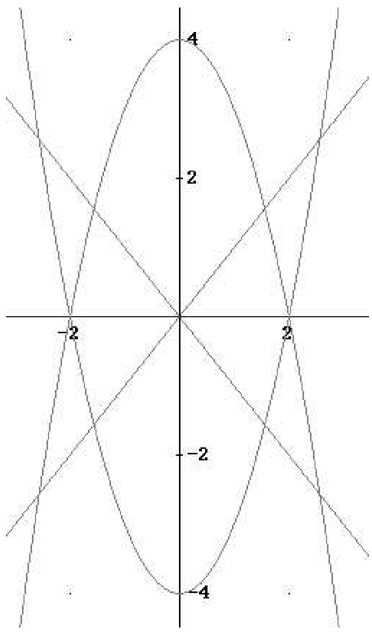
$$= \pi\cdot(\frac{8}{3}-12+18) - \pi\cdot(1-\frac{1}{3}) = (\frac{26}{3}-\frac{2}{3})\pi = 8\pi$$

c) $V_{Kegelstumpf} = \frac{\pi\cdot 2}{3}(1^2+1\cdot 3+3^2) = \frac{26}{3}\pi$

$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^2 = \frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow V = V_{Kegelstumpf} - V_{Halbkugel} = 8\pi$

Aufgabe 3:



$\bar{g}(x) = x;$ $\bar{f}(x) = x^2-4$

$f(x) = \bar{g}(x) \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$\bar{f}(x) = \bar{g}(x) \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

$$V = \pi\cdot\int_{-2}^{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} f^2(x)dx + \pi\cdot\int_{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \bar{g}^2(x)dx - \pi\cdot\int_{2}^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \bar{f}^2(x)dx$$

$$= \pi\cdot[\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x]_{-2}^{1,5616} + \pi\cdot[\frac{1}{3}x^3]_{1,5616}^{2,5616} - \pi\cdot[\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x]_2^{2,5616}$$

$$= 106,04+13,61-3,63 = 116,02$$

GK M1/M2/M3 13.1 | 2.Klausur | Name: ____________________
CUE/GA | 16.01.04

Aufgabe 4:

a) $f'(x)=2e^{2x}$ $g'(x)=(1-x)e^{-x+2}$ $h'(x)=2xe^{x^2}$

b) $F(x)=\frac{1}{4}e^{4x}$; $G(x)=-e^{1-x}$; $H(x)=e^{x^4}$; $J(x)=-2e^{-x^2}$

Aufgabe 5:

$f(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x+2}=1 \Leftrightarrow -x+2=\ln(1) \Leftrightarrow x=2$

$\Rightarrow A=-\int_0^2 f(x)dx=-[x+e^{-x+2}]_0^2=-(2+1+e^2)=-(3-e^2)\approx 4{,}389$

Aufgabe 6:

a) $f'(x)=(x-2)e^{x-1}$; $f''(x)=(x-1)e^{x-1}$; $f'''(x)=xe^{x-1}$, d. h. der lineare Term vermindert sich je Ableitung um 1. $F(x)=(x-4)e^{x-1}$

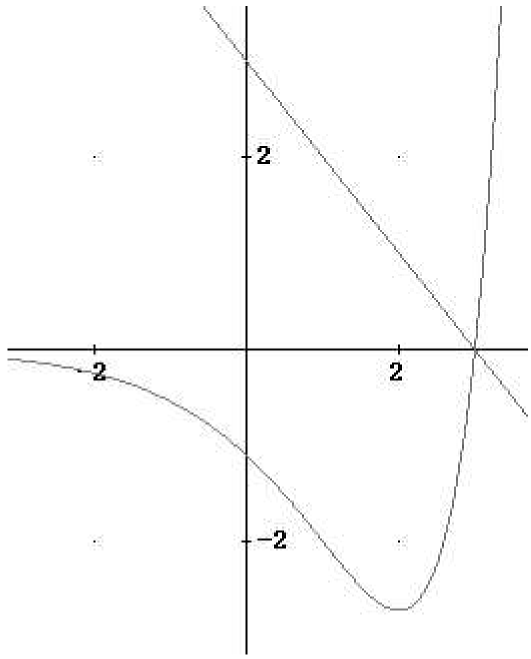
b) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow$ N(3|0)

notw. Bed. für EST: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$; hinr. Bed $f''(2)=e>0$ erfüllt $\Rightarrow$ TP(2|-e)

notw. Bed für WST: $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1$; hinr. Bed $f'''(1)=1\neq 0$ erfüllt $\Rightarrow$ WP(1|-2)

c) Die Werte lauten wie folgt:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	3,5
f(x)	-0,11	-0,25	-0,54	-1,1	-2	-2,72	0	6,09
g(x)	6	5	4	3	2	1	0	-0,5



d) Der Flächeninhalt beträgt:

$$A=\int_0^3 g(x)-f(x)dx+\int_3^{3,5} f(x)-g(x)dx$$

$$=[3x-\frac{1}{2}x^2-(x-4)e^{x-1}]_0^3+[(x-4)e^{x-1}-3x+\frac{1}{2}x^2]_3^{3,5}$$

$$=10,42+1,42=11,84$$

GK M1/M2/M3 13.1 2.Klausur Name: ______________________
CUE/GA 16.01.04

Punkteverteilung

Aufgabe	Punkte	Summen
1a)	2+2=4	10
1b)	1,5+1,5=3	
1c)	1,5+1,5=3	
2 Zeichnung	4	12
2a)	2	
2b)	4	
2c)	2	
3	5	5
4a)	0,5+0,5+1=2	5
4b)	0,5+0,5+1+1)3	
5	4	4
6a)	1+1+1=3	18
6b)	2+2+2=6	
6c)	2+4=6	
6d)	3	
Summe:		54